

平行搜索算法求解约束问题

赵 空^{1,2}, 李文辉², 袁 华³

(1 苏州工业园区工业技术学校, 江苏 苏州 215123; 2 吉林大学 计算学院, 吉林 长春 130011;
3 长春工业大学 计算机学院, 吉林 长春 130011)

摘 要: 求解非线性方程组, 运用数值方法求解, 最普遍的是采用牛顿迭代法, 当初值发生微小变动时, 用这种方法求解可能会发散或者收敛到一个用户不想要的解. 由于设计者在初始设计阶段的随意性, 往往使得系统的初始条件不好, 使牛顿法难以收敛. 通过分析传统的数值方法在非线性方程组解中的应用, 发现存在两大缺陷: (1) 对初始点敏感; (2) 求解稳定性差. 文中提出利用混沌算法的遍历性来解决此类问题.

关键词: 约束求解; 单纯形搜索; 混沌算法

中图分类号: TP31

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2010)11-0158-04

Parallel Search Algorithm for Constraint Problem

ZHAO Kong^{1,2}, LI Wen-hui², YUAN Hua³

(1 The Industrial Technology School of Suzhou Industrial Park, Suzhou 215123, China;

2 College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun 130012, China;

3 School of Computer Science & Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130011, China)

Abstract: The most common method for numerical solving is Newton iteration method. Generally, the method can reach the solution quickly. It needs a well-designed initial value and is quite sensitive to the initial value. When the initial value changed slightly, the method may emanate or converge the process and generate an unexpected solution. The random selection of the initial value in the initial design stage often makes the initial condition not good enough and gives Newton-Raphson method difficulties to converge. We've revealed two major defects after analysis on the traditional numerical method in the application of the nonlinear equation solution: (1) It is too relied on the initial point; (2) The convergence results lack of consistency. In this paper the ergodicity of chaos algorithm introduced can help resolve the issues mentioned above.

Key words: constraint solving; simplex method; chaos algorithm

1 引言

几何约束问题是基于参数化和特征造型 CAD 系统的核心问题, 但由于几何约束求解过程中的多解性, 如何准确捕获设计者的意图, 找到满足用户希望的解成为目前研究的热点. 问题的主要难点在于解空间的巨大, 一般说来, 解的数量和约束的数量成指数级关系. 实际上, 即使对于完备的约束系统, 找

到一个唯一的可行解, 被证明为是 NP 难的问题.

非线性方程组求解是几何约束问题中最本质的问题, 求解几何约束问题的最终都是一个非线性方程组求解问题. 求解非线性方程中常用的方法是数值法, 数值法的优点是速度快, 收敛速度是超线性的. 但它对于初始点的依赖极强, 如果初始点的选取不接近于真实解, 算法有可能找到错误的解^[1].

文中针对非线性方程组求解对初始点敏感、收

收稿日期: 2009-09-12; 修回日期: 2009-11-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(60573182, 60873147); 博士点基金项目(20060183042); 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET20620300)

敛性差、求解不稳定等问题,结合单纯形法和混沌算法的优点,提出一种用于求解非线性方程组的平行搜索算法(Parallel Search Algorithm,PS).

新算法分三个阶段:

(1) 粗搜索阶段:利用 Logistic 映射生成混沌轨道序列点集,然后转化成优化变量候选解群体,在候选解群体寻求解存在的领域和方向.

(2) 下降搜索阶段:将由粗搜索得到的解小范围内按单纯形算法下降机制进一步搜索,按目标函数的下降趋势方向进行快速收敛.

(3) 细搜索阶段:利用混沌映射在当前优化解邻域进行细致搜索,较准确收敛到全局意义下的较为满意的解.实验证明新算法中采用的基于混沌的初始化技术比常规的随机法更具优越性.

2 几何约束求解

系统解决约束的部分叫约束求解器.国内外很多学者运用数值计算理论、人工智能理论、图论、自由度分析理论等对约束求解进行了研究,主要有:整体求解法,稀疏矩阵法,连接分析法,规约构造法,约束传播法,符号代数法和辅助线法等.

约束问题可以形式化为 (E, C) , $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, e_i 表示几何元素,如点、线、圆等. $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, c_i 表示加在这些几何元素之间的约束.一般一个约束对应一个方程,可以表示为:

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Newton - Raphson 是求解非线性方程的有力工具,其迭代公式为:

$$X_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k),$$

$$k = 0, 1, 2 \quad (2)$$

数值法中将 Newton - Raphson 扩展为如下的优化问题来进行求解^[2-3].

$$\begin{aligned} \text{Min} f(x) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{Sub. } x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \subset X \end{aligned} \quad (3)$$

在工程实践中,很多现实设计都涉及到带有多多个约束条件的多个目标解集的同时优化.

满足所有约束条件的解空间 S 为可行域,可行域中的解为可行解,在可行域中使目标函数最小的解称为最优解.当最优解不止一个时定义^[4]:所有目标解的最优解集定义为:满足约束条件的决策变

量使目标向量函数最优,即寻找变量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 使向量函数 $f(x)$ 最优.其数学描述如下:

$$\begin{aligned} \text{min} f(x) &= \min[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T \\ \text{s. t. } g(x) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $f(x)$ 为目标函数, $g(x)$ 为约束条件.

对于变量 X^* , 当且仅当不存在其他的变量 X , 在不违背约束的条件下满足:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : f_i(X^*) \leq f_i(X) \wedge \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} : f_j(X^*) < f_j(X)$$

则称 $f_i(X^*)$ 优于 $f_i(X)$, 记作 $f_i(X^*) \geq f_i(X)$; 也称 $f_i(X)$ 劣于 $f_i(X^*)$, 记作 $f_i(X) \leq f_i(X^*)$. 变量 X^* 是最优解,最优解往往形成一个解集,称为最优解集.

3 单纯形方法

工程中许多最优化求解问题存在大规模、高维、非线性、非凸等复杂特性,单纯形搜索法(Simplex Method, SM),也称可变多面体搜索法,是一种传统的处理无约束最优化问题的直接算法,算法首先在 n 维欧氏空间 E_n 中构造一个包含 $n+1$ 个顶点的凸多面体,求出各顶点的函数值,并确定其中的最大值、次大值和最小值,然后通过反射、扩张、内缩、缩边等策略求出一个较好解,用之取代最大(差)点,从而构成新的多面体,如此多次迭代则逼近一个性能较好的极小点.

单纯形法的基本思想是 Spendley、Hext 及 Himsworth 等人首先提出的,1965 年由 Nelder 及 Mead 两人加以改进.单纯形法的优点是不必计算目标函数的梯度,它只是在一定的图形的顶点上,按照一定的规则来进行搜索,算法首先在 n 维欧氏空间中构造一个包含 $n+1$ 个顶点的凸多面体,求出各顶点的函数值,并确定其中的最大值、次最大、最小值,然后通过反射、收缩、延伸等策略求出一个较好解,取代最大点,从而构成新的多面体,这样重复迭代可以逼近一个性能较好的极小点.

4 混沌的运动特性及产生模型

混沌是存在于非线性系统中一种较为普遍的现象,混沌并不是一片混乱,而是有着精致内在机制结构的一类现象.混沌运动具有遍历性、随机性、规律性等特点,混沌运动能在一定范围内按照其自身的“规律”不重复地遍历所有状态,因此利用混沌变量进行优化搜索,会比随机搜索更具优越性,更能实现

全局优化的搜索.利用类似载波的思想,可以将混沌变量“缩放”为优化变量的约束范围之内,然后利用混沌变量的遍历性、随机性、规律性等特点,为优化的搜索提供更有利的方法.

混沌为非线性系统的一种演变现象,是由确定性规则导致的对初始条件非常敏感的无固定周期的长期行为^[5],混沌动力学以简单项的规则产生复杂的行为,在一定范围内不重复地遍历空间所有的点,具有规律性、伪随机性和遍历性.其中混沌的遍历性是指混沌运动在其混沌吸引域内是各态历经的,即在有限时间内混沌轨道经过混沌区内每一个状态点.

混沌优化用类似载波的方法将混沌状态映射到优化变量中,并把混沌运动的遍历范围同优化变量的取值范围联系起来,然后利用混沌变量进行搜索^[6].

产生混沌的规则很多,文中采用经典 Logistic 映射模型来构造混沌序列,迭代公式如下:

$$cx_i^{(k+1)} = \mu cx_i^{(k)} (1.0 - cx_i^{(k)})$$

$$i = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

其中 $cx_i^{(k)}$ 为 cx_i 在第 k 步混沌演变后的值, $cx_i \in [0, 1.0]$, $\mu \in [0, 4]$, 当 $\mu = 4$, 即得如下:

$$cx_i^{(k+1)} = 4 \cdot cx_i^{(k)} \cdot (1.0 - cx_i^{(k)})$$

$$i = 0, 1, \dots, n \quad (6)$$

当 $cx_i \in (0, 1.0)$ 且 $cx_i \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ 时,将产生混沌现象, cx_i 在 $(0, 1.0)$ 内遍历.一般都利用该式来产生混沌,对取值不属于此范围的变量 $cx_i \in (a_i, b_i)$, 通常可由式(7)、式(8)与混沌变量 $cx_i \in (0, 1.0)$ 进行往返映射.

$$cx_i = (x_i - a_i) / (b_i - a_i) \quad (7)$$

$$x_i = a_i + cx_i (b_i - a_i) \quad (8)$$

4.1 算法基本思想

平行优化算法(PS)的基本思想主要体现在两个方面:

(1) 采用混沌序列初始化个体,利用混沌提高个体的多样性和搜索的遍历性,解决算法对初值敏感的问题.

(2) 以当前整个单纯形搜索到的最优位置为基础产生混沌序列,把产生的混沌序列中的最优位置替代当前单纯形中的个体的位置.引入混沌序列的搜索算法可在迭代中产生局部最优解的许多邻域点,以此帮助惰性个体逃离局部极小点,并快速搜寻到最优解.

假设待优化的问题有 M 个参数,个体规模为 N ,则算法要求为 $N > M + 1$.在全局寻优过程中,程序从规模为 N 的种群中随机抽取 $M + 1$ 个个体作为单纯形的开始,单纯形在计算过程有可能找到全局最优解,完成计算.如果单纯形法没有找到全局最优解,它经过一定次数(事先给定)的计算后,一般来说也会找到更优秀的模型.如果 N 大出 M 很多,在每次早熟时,则可以多次调用单纯形法,加强对模型空间搜索,然后,把由单纯形产生的新模型回代到混沌的种群中,并替换掉被单纯形法随机抽取的模型,形成新一代个体,如此交替使用混沌和 SM,直到找到全局最优解.平行算法流程如图 1 所示.

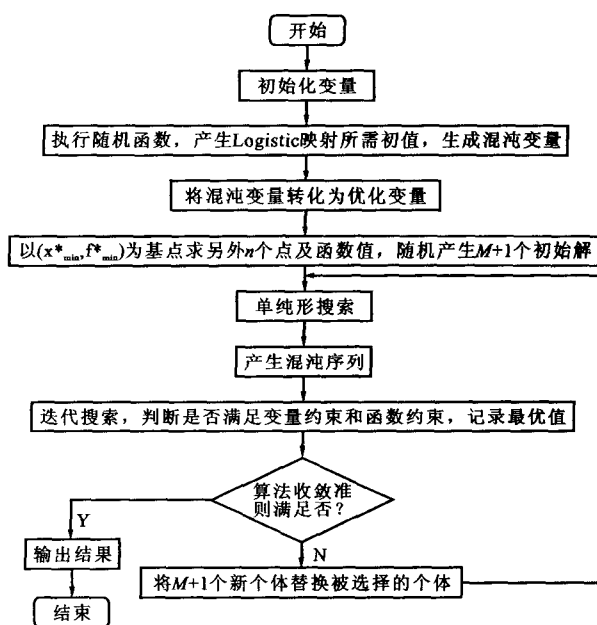


图 1 平行算法流程

步骤如下:

Step1:参数设置: $k = 0, r = 0. x_i^k = x_i(0), x_i^* = x_i(0), a_i^r = a_i, b_i^r = b_i$, 其中 $i = 0, 1, 2, \dots, n$. 这里 k 为混沌变量迭代标志, r 为细搜索标志, $x_i(0)$ 为 $(0, 1)$ 区间 n 个相异的初值, x_i^* 为当前得到的最优混沌变量, 当前最优解 f^* 初始化为一个较大的数;

Step2:混沌初始化:

Step2.1:随机产生一个 n 维每个分量数值在 $0 \sim 1$ 之间的向量, $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$, n 为目标函数中变量的个数, 根据式(5), 得到 N 个向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$;

Step2.2:将 x_i 的各个分量载波到对应变量的取值区间;

Step2.3:计算变量的适应值, 并从 N 个初始群

体中选择性能较好的 $M + 1$ 个作为初始解;

Step3:通过单纯形搜索,缩小解空间

Step4:对最优值 $f_i = (f_1, f_2, \cdots, f_d)$ 进行混沌优化,将 F 映射到 Logistic 方程(6)的定义域 $[0, 1]$, $x_i = (f_i - a_i)/(b_i - a_i)(i = 1, 2, \cdots)$, 然后用 Logistic 方程进行迭代产生混沌变量序列 $x_i^m(m = 1, 2, \cdots)$, 再把产生的混沌变量序列通过逆映射 $f_i^{(m)} = a_i + (b_i - a_i)x_i^m$ 返回到原解空间,得: $f_i^{(m)} = (f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \cdots, f_d^{(m)}), (m = 1, 2, \cdots)$;

在原解空间对混沌变量经历的每一个可行解 $f_i^{(m)}, (m = 1, 2, \cdots)$ 计算其适应值,得到性能最好的可行解 f_i^* ;

Step 5:用 f_i^* 取代当前群体中任意一个个体;

Step 6:若满足停止条件,则搜索停止,输出全局最优位置,否则用 $x_i^*(i = 1, 2, \cdots, m)$ 取代当前群体中 $m + 1$ 个体返回 Step3.

平行优化过程是一个反复迭代梯度下降搜索收敛的过程,在每次循环中每个自变量同时在更新,便于平行搜索,在每一次搜索过程中,自变量 x 的变化主要是由 Logistic 映射和单纯形来完成. Logistic 映射负责混沌轨道遍历点的生成,实现满映射,单纯形执行在当前搜索点附近正向和反向寻优,该机制的引入及其本身的遍历性使混沌优化算法具有一定的跳出局部最优的能力,避免了其它传统经典优化算法对初始值分布过于敏感,而可能收敛到局部最小点而不是全局最小点.

4.2 算法实现及结果

在求解器中画出草图如图 2 所示. 在曲线与截线内,有五个圆和一个椭圆,其中三个圆和椭圆的半径固定,要求只变动其它两圆大小和截线位置的情况下,使得相邻的图形两两相切. 求解结果如图 3 所示.

用平行搜索策略与牛顿迭代^[7]进行了比较,结果如表 1 所示.

表 1 PS 和牛顿迭代运算结果比较

参数	牛顿迭代		PS	
群体规模	60	6	10	20
寻找到最优解的次数/次	12	31	38	41
前 25 代寻找到最优解的次数(总 50 次)/次	2	27	37	45
每代耗费时间(s)	72.2	4.8	7.6	14.4

进行了 50 次实验. 从表 1 中可以看到,在 PS 用 6 个个体实现,牛顿迭代用 50 个个体的效果的情况下,

PS 运行时间仅为牛顿迭代的 1/15;当 PS 仅用 10 个个体即可实现牛顿迭代 50 个个体的效果,运行时间仅为后者的 1/10;在 20 个个体的情况下,PS 的性能全面超过牛顿迭代,运行时间仅为后者的 1/5.

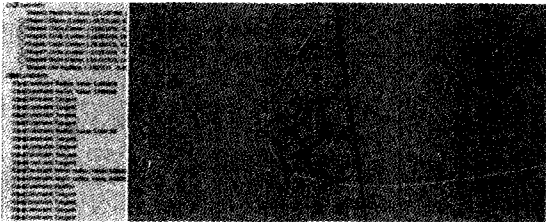


图 2 草图

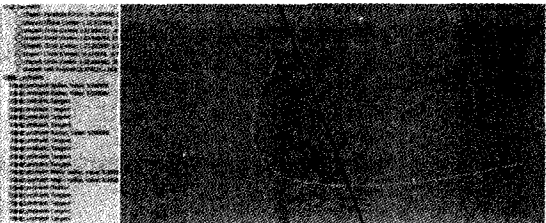


图 3 求解器求解之后结果

牛顿迭代对这个多元函数计算,发现尽管计算的稳定性对初始值不敏感,但是牛顿迭代的最终解却极大的依赖于初始值. 如果初始值的取值范围偏离最优点较远,则最终解会陷入局部极小值点. 用 PS 算法进行重新计算,算法能够跳出局部最优解,使得最终解对初始值不敏感.

以上结果说明,引入了混沌机制的单纯形算法,在求解非线性方程组特别是对未知数的取值敏感的方程组,较牛顿算法的成功率高,这主要是混沌的遍历性为算法的迭代过程提供了更多的关于优化函数的信息量,增强了每个个体的搜索能力.

5 结束语

文中使用了具有混沌机制的平行搜索算法来求解非线性方程组. 新算法借助于混沌运动,产生一组与优化变量相同数目的混沌变量,用类似载波的方式将混沌引入优化变量使其呈现混沌状态,可以将混沌变量“放大”为优化变量的约束范围之内,在一定范围内按照其自身的“规律”不重复地遍历所有状态,解决了求解中对初值敏感的问题;同时结合单纯形方法快速收敛的特性,加速在局部空间的收搜索. 混合算法搜索变量空间大、计算速度快、易于实现,对优化问题无需连续性、可微性的要求. 既保留了混沌优化的优点,又提高了搜索速度与精度. 当图形变化幅度较大时还可以收敛,是一种很有效的求解任何约束问题的方法. (下转第 165 页)

6 结束语

随着微处理器验证复杂度的加大,采用一种合适的验证方法,可加快验证的进度;同时多一种验证手段也提高了验证结果的可信度.文中提出的基于 PLI 和 Simics 的微处理器协同验证平台为微处理器验证提供了一种新的手段,该平台继承了 Verilog PLI 和 Simics 的特点,具有仿真速度快,过程控制能力强,有很好的移植性,增加了验证过程的可观测性和可控性等特点.

参考文献:

- [1] Janick Bergeron. Writing testbenches functional verification of HDL models[M]. 北京:电子工业出版社,2006:6.
- [2] Chang Yousung, Seungjong Lee. Verification of microprocessor using real world applications[C]// Proceedings of the 36th ACM/IEEE conference on Design Automation.

(上接第 161 页)

参考文献:

- [1] Maranas C, Floudas C. Finding all solutions of nonlinearly constrained systems of equations[J]. Journal of Global Optimization, 1995,7(2):143-182.
- [2] Robillson S. Extension of newton's method to nonlinear functions with values in a cone[J]. Numerical Mathematics, 1972(19):341-347.
- [3] Hentenryck P, Miehél L, Deville Y. Nomerica: a modeling language for global optimization[M]. Cambridge: The MIT Press, 1997:1-16.
- [4] 邹秀芬,刘敏忠,吴志健,等.解约束多目标优化问题的一种鲁棒的进化算法[J].计算机研究与发展,2004,41

USA: New Orleans, 181-184.

- [3] IEEE Std 1364-2001 IEEE standard Verilog hardware description language[S]. 2001.
- [4] Peter S Magnusson, Magnus Christensson, Jesper Eskilsson, et al. Simics: a full system simulation platform[J]. IEEE Computer, 2002,35(2):50-58.
- [5] 张山岗,高德远.基于虚拟机的兼容微处理器验证平台[J].微电子学与计算机,2005,22(1):141.
- [6] Virtutech AB: Simics reference manual[S]. Sweden, Stockholm, Simics-3.0, 2006.

作者简介:

周文涛 男,(1984-),硕士研究生.研究方向为专用集成电路设计、微处理器体系结构.

樊晓娅 男,(1962-),教授,博士生导师.研究方向为计算机体系结构、VLSI 系统设计.

黄小平 男,(1980-),讲师.研究方向为专用集成电路设计、VLSI 系统设计.

(6):985-990.

- [5] 卢侃等.混沌动力学[M].上海:上海远东出版社,1990.
- [6] 褚美茹,崔明勇.混沌遗传算法在配电网无功优化中的应用[J].信息技术,2004,28(10):48-50.
- [7] Ge J X, Chou S C, Gao X S. Geometrie constraint solving with optimization methods[J]. CAD, 2002,31(14):867-879.

作者简介:

赵空 男,(1973-),硕士,高级讲师.研究方向为参数化建模、智能优化算法.